Problem 1

必要性: 简单图G是二部图, 任取G中长度为m的回路C = v0, v1, …, vm-1, v0

由G是二部图可将V(G)分为两个互补子集Va和Vb, 不妨设v0∈Va, 则v1∈Vb

以此类推, v2, v4, …, vm-2∈Va, v3, v5, …, vm-1∈Vb

即下标为偶数的点属于Va, 下标为奇数的点属于Vb, m-1为奇数, m为偶数.

充分性:简单图G没有包含奇数条边的简单回路, 即任一回路都包含偶数条边

假设G是连通图, 任取点v0∈V(G), 设Va = {vi | vi与v0距离为偶数}

Vb = {vi | vi与v0距离为奇数}, 任取e∈E(G), 若e的两个端点vm, vn均在Va中

可构建回路C = vi, …, v0, …, vj, vi, 该回路的长度为奇数, 矛盾

若e的两个端点vm, vn均在Va中, 构建回路长度也为奇数, 矛盾

则vm, vn分别位于Va, Vb中, 根据二部图的定义可知G是二部图

假设G是非连通图, 则对G的每个连通分量进行上述分析都是二部图, G是二部图

Problem 2

κ(G)=1的r-正则图G (r>1), 设每个顶点的度数均为deg(v), κ(G)≤λ(G)≤deg(v)

原图连通, 任意删除一个顶点得到的图不连通, 即每个顶点都是割点

剩余r-1个点形成的简单图至少有两个连通分量,

最大边数为(r-2)(r-3)/2, 这r-1个点的平均度数最大为(r-2)(r-3)/2(r-1)

deg(v) ≤ (r-2)(r-3)/2(r-1) + 1 = (r²-3r+4)/2(r-1) ≤ r/2 (r>1), λ(G)≤r/2

Problem 3

必要性: G是2-边连通图, 则G没有割边. 任取G中两个顶点u, v

则u, v之间存在通路P1, 若任取u, v之间其他的通路P2都与P1有公共边

则取e∈P1∩P2, e属于u, v之间的任何通路, e是G的割边, 矛盾

则G中任意两个顶点之间至少有两条不含公共边的通路.

充分性: G中任意两个顶点之间至少有两条不含公共边的通路

若G不是2-边连通图, 则G有割边, 任取G的割边e, 两个端点u, v之间

至少有两条不含公共边的通路, 删除e后G仍连通, 矛盾, 则G是2-边连通图.

Problem 4

G是k-连通图, 则G中任意两点被至少k条除端点外顶点不相交的路径所连接

从G中任意删除k条边, 至多破坏两点之间的全部路径, 形成2个连通分支

Problem 5

a) 1° n=2, 由G是连通的简单图可知E≥1=n-1, 成立

2° 假设n=k时成立, 即E≥k-1

3° n=k+1, G是连通的简单图, 不存在孤立点, 顶点最小度数是1

若G中没有度数为1的顶点, G中所有顶点度数和≥2k+2

由握手定理可知E≥k+1, E≥k成立

若G中至少有一个度数为1的顶点, 任取一个这样的顶点v

G’ = G-v, 则G’有k个顶点且连通, E(G’)≥k-1, E(G)=E(G’)+1≥k成立

b) 令E = V, 对a) 中E = V – 1时的vi, vi+1连接加上边e = {vV, v1}

则该通路首尾相接, G中全部V个点位于同一长度为E = V的回路C上

若E > V时, 在上述通路中任意添加边, 均不破坏回路C

Problem 6

若顶点不重复的最大通路长度小于min{2δ(G), |V(G)|-1}, 设通路中的点

v1, v2, …, vn, 由鸽笼原理存在i满足1≤i≤n使得v1与vi+1, vi与vn连通

得到一个回路, 与回路外任意一点可以构造更长的通路

Problem 7

若n阶图G不是连通图, 则G至少有两个连通分支

设G恰好有两个连通分支, 它们分别为a阶连通图和b阶连通图

边数和最大为C(2, a) + C(2, b) = a(a-1)/2 + b(b-1)/2, 其中a+b=n, 则

a=1, b=n-1时边数最大, 为C(2, 1) + C(2, n-1) = C(2, n-1)

则当n阶图G的边数m > C(2, n-1)时, G只能有一个连通分支, 为连通图